1)

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, concava sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, *dimostrare esplicitamente* (applicando la definizione di funzione convessa e di insieme convesso) che ogni insieme di livello della funzione $g(x) = -f(x)$ è convesso.

- SCELTO UN QUALSIASI LIVELLO SU UNA FUNZIONE CONVESSA, ANCHE L'INSIEME DI LIVELLO SARÀ CONVESSO

  ↳ SOTTO-INSIEMI DELL'INSIEME DI LIVELLO

  ↳ CIOÈ: $f$ CONVESSA SU $C$ CONVESSO, ALLORA $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ VALE CHE $\underbrace{\{x \in C : f(x) \leq \alpha\}}^{\text{INSIEME SUBLIVELLO}}$ È CONVESSO.

- SIA $x, y \in C$ E $\lambda \in [0,1]$

DATO CHE $f(x)$ È CONCAVA, ALLORA PER DEFINIZIONE:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $-1$: $-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

MA QUEST'ULTIMA, È PROPRIO LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVESSA:

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) f(y)$$ ⟹ ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

DATA UNA FUNZIONE CONCAVA $f(x)$ MOLTIPLICATA PER $-1$ $(-f(x))$ RISULTA UNA FUNZIONE CONVESSA $g(x) = -f(x)$

DIM. INSIEME CONV: $\forall x, y \in C$, $z \in C$
$\forall \lambda \in (0,1)$

$f(x) \leq \alpha$
$f(y) \leq \alpha$

DATO CHE $f$ È CONVESSA: $\underbrace{f(z) \leq \lambda \overbrace{f(x)}^{\leq \alpha} + (1-\lambda) \overbrace{f(y)}^{\leq \alpha}}_{\alpha}$

$f(z) \leq \alpha$, DUNQUE
$z \in C \to L_\alpha$ È CONVESSO

2)

Dato un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ (motivare ogni risposta):

- si definisca cosa sono i suoi vertici, e si dica se un poliedro ammette sempre vertici;
- si dica se un qualsiasi sistema lineare di equazioni e disequazioni in $n$ variabili rappresenta un poliedro di $\mathbb{R}^n$; → SÌ, PURCHÉ L'INSIEME DELLE SOLUZIONI NON SIA VUOTO (CIOÈ SISTEMA INCOMPATIBILE) E LE FUNZIONI SIANO LINEARI / AFFINI, QUINDI DEL TIPO $a^T x + b \leq 0$, $a^T x + b \geq 0$, $a^T x + b = 0$ PERCHÉ AVENDO QUESTA SITUAZIONE ABBIAMO INTERSEZIONE DI SEMISPAZI CHIUSI O IPERPIANI
- si dica se $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ rappresentano dei polìtopi. Si dica infine se un polìtopo in $\mathbb{R}^n$ è senz'altro un polìtopo anche in $\mathbb{R}$. ⟹ NO

- DEFINIZIONE DI VERTICE O PUNTO ESTREMO:

  DATO L'INSIEME <u>CONVESSO</u> $C \subseteq \mathbb{R}^n$, SI DICE CHE $\bar{x} \in C$ È UN P.TO ESTREMO O VERTICE DI $C$ SE <u>NON</u> ESISTONO DUE PUNTI $y, z \in C$, CON $y \neq z$, DISTINTI DA $\bar{x}$ TALI CHE $\bar{x} \in [y, z]$ ⟹ TALI CHE $\bar{x}$ SI TROVI SUL SEGMENTO CHE CONGIUNGE $y$ E $z$ (CIOÈ NON ESISTE $\bar{x} = \lambda y + (1-\lambda) z$ PER QUALCHE $\lambda \in (0,1)$)

- UN POLIEDRO <u>NON</u> AMMETTE SEMPRE VERTICI, MA DEVONO ESSERE RISPETTATE DELLE CONDIZIONI:

  DATO $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$
  DOVE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ E $b \in \mathbb{R}^m$ ⟹ INTERSEZIONE DI SEMISPAZI CHIUSI O IPERPIANI

  1) DOVE $n$ = GRANDEZZA SPAZIO $(\mathbb{R}^n)$ E $m$ = VINCOLI, ALLORA $m \geq n$
  2) IL PUNTO GENERICO $P_n$, TROVATO RISOLVENDO IL SISTEMA DI $n$ UGUAGLIANZE, DEVE RISPETTARE TUTTI GLI $m$ VINCOLI
  3) IL DETERMINANTE DELLA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEI VINCOLI DEVE ESSERE $\neq 0$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ Cx = d\}$

- UN POLITOPO È UN POLIEDRO LIMITATO ⟹ INTERSEZIONE FINITA DI SEMISPAZI CHIUSI $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ CON INSIEME <u>LIMITATO</u> DI PUNTI

  LA SUA LIMITATEZZA VIENE DATA DAL SUO INSIEME DI PUNTI CHE LO RAPPRESENTANO: TUTTI I PUNTI DELL'INSIEME DEVONO STARE ALL'INTERNO DI UNA PALLA DI RAGGIO FINITO

- $\mathbb{R}^n$ → INSIEME CONVESSO NON LIMITATO → NON È POLITOPO

  $\emptyset$ → È CONVESSO → INSIEME LIMITATO → POLITOPO

  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ → NON È CONVESSO (POSSO PRENDERE 2 PUNTI E <u>NON</u> TUTTO IL SEGMENTO APPARTIENE ALL'INSIEME) → NON È POLIEDRO → NON È POLITOPO

3)

Si consideri il problema di PL

$$\min_{x \in P} c^T x$$

dove $P$ è il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, e lo si trasformi in *forma standard.* Si dica poi se l'insieme ammissibile del problema in forma standard può essere un polìtopo, mentre $P$ è un generico poliedro, e viceversa.

- LA FORMA STANDARD DI UN PROBLEMA DI PL È:

PASSAGGI:

1) $Ax \geq b \to -Ax \leq -b$
2) $-Ax + s = -b$ OGNI SLACK AGGIUNTA: $m_i$
3) $-A(x^+ - x^-) + s = -b$ $n \to 2n$ $\mathbb{R}^{2n + m_i + \dots}$

↳ SE $x$ NON È SPECIF. $\geq 0$

STANDARD

STANDARD

$$P' = \{ x' \in \mathbb{R}^{2n+m; \dots} \mid -A(x^+ - x^-) + s = -b \}$$

$$x' = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ m_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$\min \; c^T x$ LE DISUGUAGLIANZE SI TRASFORMANO IN UGUAGLIANZE

$A'x = b'$ $\Rightarrow$ IL DOMINIO DIVENTA $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b', \; x \geq 0 \}$

$x \geq 0$

- L'INSIEME AMMISSIBILE IN FORMA STANDARD PUÓ ESSERE UN POLITOPO, CON P GENERICO POLIEDRO
  $\hookrightarrow$ PUÓ ESSERE CHE IL POLIEDRO P NON SIA LIMITATO, PERÓ APPLICANDO LA FORMA STANDARD I VINCOLI CHIUDONO IL DOMINIO RENDENDOLO LIMITATO E QUINDI POLITOPO

- UN GENERICO POLITOPO P, PORTANDOLO IN FORMA STANDARD RIMANE NECESSARIAMENTE ANCORA UN POLITOPO, E NON UN GENERICO POLIEDRO P

4)

Data la funzione *affine* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, usando (esplicitamente) la definizione di convessità per una funzione reale, si dimostri che gli insiemi di livello di $f(x)$ sono convessi.

- UNA FUNZIONE AFFINE È DELLA FORMA $f(x) = c^T x + b$ CON $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$
- DATO CHE SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE AFFINE È UNA FUNZIONE CONVESSA, ALLORA VALE LA PROPRIETÁ:
  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ E $\forall \lambda \in [0,1]$
  $\hookrightarrow f$ AFFINE
- DEVO DIMOSTRARE CHE L'INSIEME DI LIVELLO $L_\alpha := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha \}$ È CONVESSO:
  PRENDO $\underbrace{x, y \in L_\alpha}_{f(x) \leq \alpha \; \wedge \; f(y) \leq \alpha}$ E, SE TUTTO IL SEGMENTO CHE CONGIUNGE $\widehat{xy} \in L_\alpha$, ALLORA L'INSIEME È CONVESSO

  PRENDO UN QUALSIASI $\lambda \in [0,1]$ E CONSIDERO $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ PUNTO GENERICO
  $f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$
  QUINDI POSSO SCRIVERE
  $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
  POI, SAPENDO CHE $f(x) \leq \alpha$ E $f(y) \leq \alpha$, POSSO SOSTITUIRE:
  $f(z) \leq \underbrace{\lambda \alpha + (1-\lambda)\alpha}_{\text{È ESATTAMENTE } = \alpha}$

  ALLORA $f(z) \leq \alpha \Rightarrow z \in L_\alpha \Rightarrow L_\alpha$ È CONVESSO PERCHÉ OGNI COMBINAZIONE CONVESSA DI DUE PUNTI $x, y \in \mathbb{R}^n$ E $\lambda \in [0,1]$ RIMANE A SUA VOLTA IN $L_\alpha$

5)

Si descriva il Metodo del Branch & Bound, specificando a quale problema viene applicato e quali sono i passi (analitici) che prevede.

- È UNA TECNICA GENERALE DI OTTIMIZZAZIONE COMBINATORIA UTILIZZATA PER RISOLVERE PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE INTERA (IP) E DI PROGRAMMAZIONE BINARIA (BIP, PER ESEMPIO KNAPSACK, PROBLEMA DELLO ZAINO)

- SI APPLICA A VARI PROBLEMI, UTILIZZIAMO COME ESEMPIO KNAPSACK: HO LA FUNZIONE OBIETTIVO CHE RAPPRESENTA "L'UTILITÁ" DEGLI OGGETTI $x_1 \dots x_n$ DA METTERE NELLO ZAINO. POI HO IL VINCOLO DEL "VOLUME" DOVE OGNI OGGETTO $x_1 \dots x_n$ OCCUPA UN CERTO VOLUME.
  L'OBIETTIVO È QUELLO DI METTERE PIÚ COSE POSSIBILI ED IL PIÚ UTILI POSSIBILE NELLO ZAINO.

- SI SVOLGE IN VARIE FASI:
  $a$ = UTILITÁ, $b$ = VOLUME : $a, b \in \{0,1\} \longrightarrow$ $a > 0, b > 0$ LASCIO COSÍ
  $a < 0, b > 0$ $\;\; a = b = 0$
  $a < 0, b < 0$ $\;\; a = 1 - c \;\; b = 1 - c$
  $a > 0, b < 0$ $\;\; a = b = 1$
  DOPO LE DOVUTE SOSTITUZIONI, "RIORDINO" GLI OGGETTI IN BASE AL RAPPORTO (DECRESCENTE) UTILITÁ / VOLUME
  DOPODICHÉ CERCO DI INSERIRE PIÚ OGGETTI POSSIBILI SENZA SFORARE "LO SPAZIO TOTALE".
  SE RIESCO AD INSERIRE TUTTO E $\hat{x} = \{x_1 \dots x_n\}$ HA TUTTE LE COMPONENTI INTERE, ALLORA CALCOLO $\overset{\text{OBIETTIVO}}{f(\hat{x})}$ E AGGIORNO COME SOLUZIONE OTTIMA E TOLGO IL PROBLEMA DALLA LISTA.

NEL CASO NON SIANO TUTTE INTERE, FACCIO BRANCHING E SUDDIVIDO IN 2 SOTTO-PROBLEMI (ES. $\hat{x}=(1,0,\frac{1}{2}) \Rightarrow \overset{P_1}{x_3=0}\ ,\ \overset{P_2}{x_3=1}$).
↳ RIESEGUO GLI STESSI PASSAGGI E STESSE CONDIZIONI, LA SOLUZIONE OTTIMA SARÀ QUELLA CON $f(\hat{x})$ PIÙ ALTO.

6)

Si enunci il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare, analizzando sia il caso di poliedro ammissibile generico, sia il caso di poliedro ammissibile in Forma Standard. Si dica infine (motivandolo) se un poliedro $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ può contenere rette.

- IL TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PL DICE CHE SE ESISTE UNA SOLUZIONE OTTIMA FINITA, ALLORA QUEST'ULTIMA SI TROVA SU UN VERTICE DEL POLIEDRO.
  IN PARTICOLARE: $P=\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ POLIEDRO GENERICO, SE:
  $P \neq \emptyset$ E IL PROBLEMA È LIMITATO $\Rightarrow$ ESISTE UN VERTICE CHE È SOLUZIONE OTTIMA → DEVO PORTARE IN FORMA STANDARD E POI RISOLVERE
  PER LA FORMA STANDARD VALE LA STESSA COSA: $P=\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=b\}$ → APPLICO DIRETTAMENTE PASSAGGI PER TROVARE VERTEX

- ATTENZIONE: SE LA FUNZIONE OBIETTIVO È LIMITATA INFERIORMENTE ED ILLIMITATA SUPERIORMENTE, PER IL PROBLEMA DI MINIMIZZAZIONE IL TEOREMA VALE UGUALMENTE (STESSA COSA PER MAX)

- SE IL POLIEDRO CONTIENE UNA RETTA $\Rightarrow$ ILLIMITATO DA AMBO I VERSI $\Rightarrow$ NON VALE IL TEOREMA
  ↳ IL POLIEDRO PUÒ CONTENERE RETTE, MA NON AVRÀ SOLUZIONE OTTIMA FINITA AL PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

7)

Dato il problema ($c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \end{aligned}$$

si calcoli prima il gradiente della funzione obiettivo. Inoltre si dimostri che tale gradiente è ortogonale alle curve di livello della funzione obiettivo ed è orientato nel verso crescente di quest'ultima.

- IL GRADIENTE DELLA $f(x)=c^T x$ È: $\nabla f(x) = c$

- IL GRADIENTE È ORTOGONALE ALLE CURVE DI LIVELLO PERCHÉ:
↳ UNA CURVA DI LIVELLO $\underbrace{\text{È DOVE}}_{=\text{INSIEME DEI PUNTI X TALI CHE}}$ UNA FUNZIONE ASSUME UN VALORE COSTANTE: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x)=\alpha\}$

- MUOVENDOMI SULLA STESSA CURVA DI LIVELLO $\overset{\text{FUNZIONE RIMANE COSTANTE → NON CAMBIA}}{f(x)=\alpha}$, SE CONSIDERO UN $\overbrace{\text{VETTORE TANGENTE A QUELLA CURVA}}^{\text{→ FARE SÌ CHE IL PRODOTTO } \nabla f(x)\cdot v = 0}$ CHE USO COME "DIREZIONE" PER LA DERIVATA DIREZIONALE ED IL RISULTATO È ZERO, ALLORA IL GRADIENTE È $\perp$ (= ORTOG.) RISPETTO ALLA CURVA $\Rightarrow \nabla f(x)\cdot v = 0$

- CONSIDERATO UNO SPOSTAMENTO TRA 2 CURVE: $f(x_1)=\alpha_1$ $f(x_2)=\alpha_2$ CON $\alpha_2 > \alpha_1$, CHIAMIAMO $\Delta_x = x_2 - x_1 = w$, ALLORA SE IL PRODOTTO SCALARE TRA $\nabla f(x)\cdot w > 0$, ALLORA IL GRADIENTE HA $\underbrace{\text{DIREZIONE DI CRESCITA}}_{\text{LO STESSO DI } f(x)}$
  ($\Delta_x$ = $w$ = VETTORE CHE UNISCE 2 PUNTI DI DUE CURVE DI LIVELLO DIFFERENTI)

8)

8.1

Considerata la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si dimostri esplicitamente (i.e. usando la definizione di convessità) che lo spazio nullo $N[A]$ è un insieme convesso.

IN GENERALE: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ È SPAZIO NULLO

8.2

Considerata la matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si dica (dimostrando *esplicitamente* l'asserto) se lo spazio nullo $N[A]$ rappresenta uno spazio vettoriale, indicandone anche la dimensione.

8.1) $N[A] = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

- UN INSIEME È CONVESSO SSE: $\forall x_1, x_2 \in C$ E $\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$
  PRENDO $Ax_1 = 0 \in C$ E $Ax_2 = 0 \in C$
  $\forall \lambda \in [0,1]$ DEVO DIMOSTRARE CHE:

$$Az = A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda \underset{0}{Ax} + (1-\lambda)\underset{0}{Ay} \Rightarrow Az = 0$$

$Az = 0 \in C \Rightarrow N(A)$ È CONVESSO

8.2) LO SPAZIO NULLO RISPETTA TUTTE LE PROPRIETÀ DI UNO SPAZIO VETTORIALE: PRESENZA ELEMENTO NEUTRO $(0)$, CHIUSURA PER SOMMA E MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE.

- IN GENERALE, LA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO NULLO CON UNA MAT. $\mathbb{R}^{m \times m}$, AVRÒ CHE $\dim(N[A]) = m - \text{RANGO}(A)$

$m$ = N° COLONNE = N° VARIABILI

RANGO(A) = MAX N° DI RIGHE O COLONNE L.I. = ES. MAT. $4 \times 4$: RANGO $= 4$ SSE DET $\neq 0$, ALTRIMENTI PROVO CON SOTTOMATRICE $3 \times 3$

## 9)

Si dimostri che dato il problema $\min_{x \in C} f(x)$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f(x)$ *strettamente convessa* su $C$, allora se $x^*$ è un punto di minimo per $f(x)$ su $C$ sarà anche l'unico punto di minimo.

- SE $f$ FOSSE STATA SOLO CONVESSA (NON STRETTAMENTE), IL PUNTO DI MINIMO SAREBBE STATO GLOBALE MA NON UNICO: AVREI POTUTO TROVARE $\bar{x} = \tilde{\bar{x}}$: $f(\bar{x}) = f(\tilde{\bar{x}})$ CON $\bar{x}$ E $\tilde{\bar{x}}$ MINIMI GLOBALI

- $f$ STRETT. CONVESSA SU $C$ CONVESSO $\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ E $\forall \lambda \in [0,1]$ E $x \neq y$

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

PER ASSURDO

SUPPONIAMO CHE ESISTANO DUE PUNTI $x'$ E $\bar{x}$ DISTINTI $(x' \neq \bar{x})$ MINIMI GLOBALI: $f(\bar{x}) = f(x') = \min f(x)$

CONSIDERO IL PUNTO MEDIO $x_\lambda = \lambda x' + (1-\lambda)\bar{x}$

SOSTITUISCO:

$f(x') = f(\bar{x})$

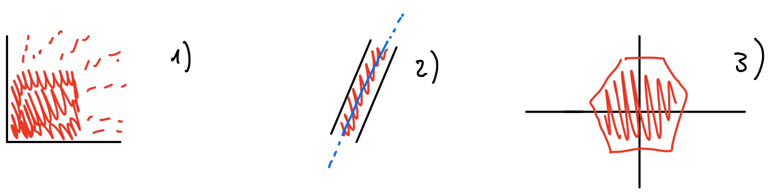
$$f(x_\lambda) < \lambda f(x') + (1-\lambda) f(\bar{x}) \Rightarrow f(x_\lambda) < \underbrace{\lambda m + (1-\lambda) m}_{= m}$$

- HO TROVATO CHE IL PUNTO MEDIO $x_\lambda$ È PIÙ PICCOLO DEI MINIMI GLOBALI $\Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow$ IL MINIMO GLOBALE È UNICO

## 10)

Dato un poliedro $P$ si definisca cosa sono i vertici. Dare inoltre almeno un esempio grafico per ciascuno dei seguenti casi: poliedro illimitato che ammette vertici, poliedro illimitato che NON ammette vertici, polìtopo. Infine si giustifichi, dal punto di vista teorico, se un polìtopo può essere *privo* di vertici.

- DEF. VERTICE: VEDI DOMANDA 2




1) POLIEDRO ILLIMITATO CHE AMMETTE VERTICI
2) POLIEDRO ILLIMITATO CHE NON AMMETTE VERTICI
3) POLITOPO

- UN POLITOPO HA SEMPRE ALMENO 1 VERTICE: SE NON HA VERTICI, ALLORA L'INSIEME NON È UN POLITOPO

↳ PERCHÉ È UN OGGETTO ASSOCIATO AD UN INSIEME FINITO $\Rightarrow$ DEVE SEMPRE AVERE ALMENO UN VERTICE

OGGETTO = CON SPIGOLI

- POLITOPO: DISUGUAGLIANZE E UGUAGLIANZE LINEARI (COME POLIEDRO) PERÒ CON L'INSIEME DELLE SOLUZIONI FINITO E NON VUOTO

## 11)

Data la funzione $f(x)+5$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e convessa sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, *dimostrare esplicitamente* che ogni minimo locale di $f(x)+5$ è anche un suo minimo globale su $C$.

- PER DEFINIZIONE: f CONVESSA SU INSIEME CONVESSO $\Rightarrow$ OGNI MINIMO LOCALE È ANCHE GLOBALE (NON UNICO $\Rightarrow$ SOLO SE STRETT. CONVESSA)

↳ f CONVESSA $\Rightarrow$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

SE $\bar{x}$ È MIN. GLOBALE, ALLORA $f(\bar{x}) < f(x')$ $\forall x' \in \mathbb{R}^n$

- SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $x'$ SIA MIN. LOCALE, MA NON GLOBALE $\Rightarrow$ ALLORA $\bar{x} \in C$ TALE CHE $f(\bar{x}) < f(x')$

↳ PER DEF. DI CONVESSITÀ, ANCHE $x_\lambda = \lambda \bar{x} + (1-\lambda) x' \in C$

↳ PER CONVESSITÀ DELLA FUNZIONE, VALE $f(x_\lambda) \le \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x')$

MA DATO CHE PER IPOTESI $f(\bar{x}) < f(x')$, ALLORA $\to$ $f(x_\lambda) \le \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x') < \underbrace{\lambda f(x') + (1-\lambda) f(x')}_{= f(x')}$

$\Downarrow$

$f(x_\lambda) < f(x')$

HO TROVATO UN MINIMO VICINO AL MIN. LOCALE $\Rightarrow$ ASSURDO

$\to$ NOTARE CHE CON $\lambda = 1$, OTTERREI $f(x_\lambda) \le f(\bar{x})$

$\Rightarrow$ ASSURDO SE $\bar{x}$ È GLOBALE: OGNI MIN. LOCALE È ANCHE GLOBALE

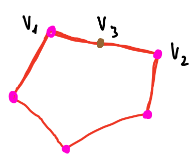
## 12)

Sia dato un poliedro $\mathcal{P}$ non vuoto in $\mathbb{R}^n$, e siano $v_1, v_2$ vertici di $\mathcal{P}$. Si dica se i punti nella combinazione convessa di tali vertici risultano a loro volta vertici di $\mathcal{P}$, e si diano esempi grafici delle conclusioni.

- PER DEFINIZIONE, UN VERTICE V VIENE DEFINITO TALE SE:
  1) APPARTIENE AL POLIEDRO
  2) NON ESISTONO 2 PUNTI $x \ne y$ ($\ne V$): $V = \lambda x + (1-\lambda) y$ CON $\lambda \in (0,1)$

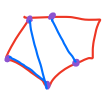
QUINDI NON PUÒ ESISTERE $V_3$: $V_3 = \lambda V_1 + (1-\lambda) V_2$

ESEMPIO GRAFICO




$\Rightarrow$ NEL SEGMENTO CHE CONGIUNGE $V_1, V_2$ NON PUÒ ESISTERE UN VERTICE $V_3$

- IN GENERALE, PRESI QUALSIASI DUE PUNTI $\in \mathcal{P}$, IL SEGMENTO CHE COLLEGA I DUE PUNTI NON PUÒ CONTENERE VERTICI:



$\Rightarrow$ I SEGMENTI IN BLU NON POSSONO CONTENERE VERTICI

## 13)

Dato l'insieme in $\mathbb{R}^3$ definito attraverso le seguenti uguaglianze lineari

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

si dimostri (applicando la definizione) che risulta convesso. Inoltre si dica se tale insieme è un poliedro di $\mathbb{R}^3$ e si dica anche (motivandolo) se contiene almeno uno degli assi coordinati.

DEF: $\mathcal{P}$ È DEL TIPO $Ax = b$ $\Rightarrow$ PRENDO $Ax = b$ $Ay = b$

$Az = \lambda \underbrace{Ax}_{= b} + (1-\lambda) \underbrace{Ay}_{= b} \to Az = b \in \mathcal{P} \Rightarrow$ CONVESSO

- UN INSIEME È CONVESSO SSE $\forall x, y \in C$, $\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda) y \in C$

- L'INSIEME È DATO DALLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE IN $\mathbb{R}^3$:

$S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b \}$

CON $b = 0$ E $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

ESSENDO QUESTO SISTEMA UNA INTERSEZIONE DI IPERPIANI (OSSIA EQ. LINEARI) L'INSIEME È CONVESSO.

• $S$ È UN POLIEDRO PERCHÉ È DELLA FORMA $Ax = b$ CIOÈ CASO PARTICOLARE DI POLIEDRO (INTERSEZIONE DI SEMISPAZI CHIUSI)
↳ NON È POLITOPO, PERCHÉ IL SISTEMA HA PUNTI INFINITI.

• RISOLVENDO IL SISTEMA, ABBIAMO $S = \{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ → CIOÈ $x_1 = x_2 = x_3$ → NESSUNO DEGLI ASSI COORDINATI È CONTENUTO IN $S$

• ASSI COORDINATI: IL SISTEMA DOVREBBE AVERE COME SOLUZIONI $(t,0,0), (0,t,0), (0,0,t)$ IN $\mathbb{R}^3$, E QUESTI DOVREBBERO ESSERE VALIDI $\forall t$

## 14)

Si dimostri che data la funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, presi *comunque* i punti $y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$ di minimo globale per $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, allora anche il punto $w = (y + z)/2$ è un minimo globale di $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

• $f$ CONVESSA, QUINDI: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n \wedge \forall \lambda \in [0,1]$

SE $z$ ED $y$ SONO DI MIN. GLOBALE ALLORA NECESSARIAMENTE AVRÒ CHE $f(z) = f(y) = m = \text{MIN.}$
$\parallel$
SICURAMENTE $\leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

• PARTIAMO DALLA DEFINIZIONE: $f(\lambda y + (1-\lambda) z) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z)$

PONGO $\lambda = 1/2 \in [0,1]$

ALLORA: $f(1/2\, y + 1/2\, z) \leq 1/2\, f(y) + 1/2\, f(z)$ → $f(y)$ E $f(z)$ SONO UGUALI: $m$

$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \leq 1/2\, m + 1/2\, m$ → PONGO $w = \frac{y+z}{2}$

$f(w) \leq m$ → DATO CHE $m$ È MIN GLOBALE, ALLORA L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE ANCHE $w$ LO SIA:

$w = \frac{y+z}{2}$ È DI MIN. GLOBALE PER $f(x)$

## 15)

Siano dati i vettori reali $b_1, b_2, b_3$ e le matrici $B_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ e $B_3 \in \mathbb{R}^{m_3 \times n}$. Si trasformi esplicitamente il poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ B_1 x \geq b_1,\ B_2 x \leq b_2,\ B_3 x = b_3\}$ nella *forma standard.*

SLACK: PORTARE DA DISUGUAGLIANZA AD UGUAGLIANZA "RIEMPIENDO" CIÒ CHE MANCA

• DEVO OTTENERE UN POLIEDRO DELLA FORMA $P' = \{x' \in \mathbb{R}^k \mid A'x' = b'\}$ CON $x' \geq 0$

1) $B_1 x \geq b_1 \xrightarrow{\text{MOLT. PER } -1} -B_1 x \leq -b_1 \xrightarrow{\text{VAR. SLACK}} -B_1 x + s_1 = -b_1$, CON $s_1 \geq 0$ → $m_1$ VARIABILI INTRODOTTE

2) $B_2 x \leq b_2 \xrightarrow{\text{VAR. SLACK}} B_2 x + s_2 = b_2$, CON $s_2 \geq 0$ → $m_2$ VAR. INTRO.

3) $B_3 x = b_3$ → GIÀ IN FORMA STANDARD → NO VAR. INTROD.

↱ SE AVESSI GIÀ AVUTO $x \geq 0$ NON AVREI DOVUTO FARE NULLA
PER OGNI VARIABILE $x_i$ (NON ESSENDO SPECIFICATO) DEVO TRASFORMARLO: $x_i = x_i^+ - x_i^-$ → $2n$ VAR. ANZICHÉ $n$

ALLORA IL MIO NUOVO VETTORE SARÀ: $x' = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n + m_1 + m_2}$

• FORMA STANDARD FINALE:

$$P' = \left\{ x' \in \mathbb{R}^{2n+m_1+m_2} \;\middle|\; -B_1(x_1^+ - x_1^-) + s_1 = -b_1,\ B_2(x_2^+ - x_2^-) + s_2 = b_2,\ B_3(x_3^+ - x_3^-) = b_3 \right\} \quad \text{CON } x' = \begin{bmatrix} x_i^+ \\ x_i^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

## 16)

Si dimostri che la derivata direzionale della funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continuamente differenziabile in $\mathbb{R}^n$, nel punto $\bar{x}$, lungo la direzione $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, è data da

$$\nabla f(\bar{x})^T d.$$

- IN GENERALE, VALE PER TUTTI GLI M DI $\mathbb{R}^m$

- LA DERIVATA DIREZIONALE DI $f$ NEL PUNTO $\bar{x}$ CON DIREZIONE $d$ È DEFINITA COME:

$$D_d f(\bar{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}+td)-f(\bar{x})}{t}$$

MA DATO CHE $f$ È CONT. DIFF., POSSIAMO USARE SVILUPPO DI TAYLOR DI I° ORDINE:

$$f(\bar{x}+td) = f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})^T d + o(t) \qquad \text{CON} \quad \lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

ALLORA POSSO RISCRIVERE:

$$D_d f(\bar{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{f(\bar{x})} + t\nabla f(\bar{x})^T d + o(t) - \cancel{f(\bar{x})}}{t}$$

$$= \underbrace{\frac{t\nabla f(\bar{x}) d}{t}}_{\nabla f(\bar{x}) d} + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{0}$$

$\Longrightarrow$ ABBIAMO MOSTRATO CHE LA DERIVATA DIREZIONALE È DATA DA: $\nabla f(\bar{x}) d$

## 17)

Date le matrici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, i vettori $b \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}^p$, nonchè l'insieme $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq b, \; Bx = c\}$, dimostrare esplicitamente (i.e. applicando la definizione di convessità) che l'insieme $\mathcal{A}$ è convesso.

NOTA: POTEVAMO ANCHE DIRE CHE L'INSIEME $A$ ERA INTERSEZIONE DI SEMISPAZI CHIUSI ED IPERPIANI E QUINDI ERA CONVESSO

- DEFINIZIONE CONVESSITÀ DI UN INSIEME:

$\forall x, y \in C \; , \; \forall \lambda \in [0,1]$ :

$z = \lambda x + (1-\lambda) y \in C$ $\longrightarrow$ SE VALE QUESTO, L'INSIEME È CONVESSO

SIANO $x, y \in C$ : $\quad Ax \geq b \quad Bx = c$

$\qquad\qquad\qquad\quad Ay \geq b \quad By = c$

DEVO MOSTRARE CHE $z \in C \Longrightarrow$ $Az \geq b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Bz = c$

$$Az = A(\lambda x + (1-\lambda) y) = \underbrace{\lambda \underset{\geq b}{Ax} + (1-\lambda)\underset{\geq b}{Ay}}$$

$$\lambda Ax + (1-\lambda) Ay \geq \underbrace{\lambda b + (1-\lambda) b}_{b}$$

$\Longrightarrow Az \geq b \quad \square$

$$Bz = B(\lambda x + (1-\lambda) y) = \underbrace{\lambda \underset{=c}{Bx} + (1-\lambda)\underset{=c}{By}}_{\lambda c + (1-\lambda) c \, = \, c}$$

$\Longrightarrow Bz = c \quad \square$

- ENTRAMBE LE CONDIZIONI SONO SODDISFATTE: L'INSIEME $A$ È CONVESSO

18)

Date le funzioni concave $f(x)$ e $g(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *dimostrare esplicitamente* che gli insiemi di livello della funzione $h(x) = -[2f(x) + 3g(x)]$ sono convessi.

- CONSIDERIAMO $w(x) = 2f(x) + 3g(x)$

NOTIAMO CHE SE $f_i$ È CONCAVA E $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$, ALLORA ANCHE $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ È CONCAVA

QUINDI, DICIAMO CHE $w(x) = 2f(x) + 3g(x)$ È CONCAVA

- DIMOSTRIAMO ALLORA CHE $h(x) = -[w(x)]$ È CONVESSA: VEDI DOMANDA 1

ESSENDO $h(x)$ CONVESSA, VALE LA RELAZIONE $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$

- SE IL SUO $\underbrace{\text{INSIEME DI LIVELLO PER UN CERTO } \alpha}_{L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq \alpha\}}$ È CONVESSO, ALLORA DEVE VALERE: $\forall x, y \in L_\alpha$, ANCHE IL SEGMENTO CHE LI CONGIUNGE DEVE

APPARTENERE A $L_\alpha \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda)y \in L_\alpha \quad \forall \lambda \in [0,1]$

- PRENDO $h(x) \leq \alpha$ E $h(y) \leq \alpha$

$$h(z) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha$$

$$h(z) \leq \underbrace{\lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha}_{=\alpha} \Rightarrow h(z) \leq \alpha \Rightarrow z \in L_\alpha \Rightarrow L_\alpha \text{ È CONVESSO PER UN GENERICO } \alpha$$

19)

Siano date le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convesse su $\mathbb{R}^n$, e si consideri il problema di massimizzazione

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} -3f(x) - 6g(x).$$

Si dimostri *esplicitamente* (i.e. usando la definizione di convessità per una funzione) che se $x^*$ e $y^*$ sono massimi *locali* su $\mathbb{R}^n$ del precedente problema di massimizzazione, allora il punto $x^*/2 + y^*/2$ ne è un massimo *globale*.

- POSSO STUDIARE ALLO STESSO MODO IL PROBLEMA: MIN $3f(x) + 6g(x)$, CONSIDERANDO $x'$ E $y'$ MIN LOCALI ANZICHÉ MAX.

ALLORA, DEVO DIMOSTRARE CHE $\frac{1}{2}x'$ E $\frac{1}{2}y'$ SONO MINIMI GLOBALI

↳ NOTA: PER DEFINIZIONE, SONO ANCHE GLOBALI: $h(x') = h(y')$

- DATO CHE $f$ E $g$ SONO CONVESSE, E GLI SCALARI $\{3, 6\}$ SONO $\geq 0$, ALLORA POSSO STUDIARE DIRETTAMENTE $\underbrace{h(x) = 3f(x) + 6g(x)}_{\text{CONVESSA}}$

SE $x'$ E $y'$ SONO MIN LOCALI PER $h(x)$, ALLORA $\frac{1}{2}x'$ E $\frac{1}{2}y'$ SONO MIN GLOBALI $\Rightarrow z = \frac{x' + y'}{2}$ ↖ MIN. GLOBALE

- $h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$

SE $\frac{1}{2}x'$ E $\frac{1}{2}y'$ SONO MIN GLOBALI, QUESTO SIGNIFICA CHE $f(\frac{1}{2}x') = f(\frac{1}{2}y') = m$

PONGO $\lambda = 1/2$

$$h(1/2\, x + 1/2\, y) \leq 1/2\, h(x) + 1/2\, h(y)$$

MIN GLOBALE!!

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1/2\, m + 1/2\, m \Rightarrow h\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq m$$

ALLORA POSSO DIRE CHE $\frac{x+y}{2}$ È MIN GLOBALE, QUINDI È VERO CHE $\frac{1}{2}x'$ E $\frac{1}{2}y'$ LO SONO

## 20)

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa su $\mathbb{R}^n$, dimostrare (usando la definizione di convessità per una funzione reale) che gli insiemi di livello della funzione

$$g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

sono convessi.

- ESSENDO $f(x)$ LINEARE + COMPONENTE LINEARE $= \sum_{i=1}^{n} x_i$ ALLORA POSSO DIRE CHE $g(x)$ È LINEARE $\Rightarrow$ CONVEX
- DEVO DIMOSTRARE CHE $L_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq \alpha\}$ È CONVESSO

INSIEME CONVESSO: SE $x \neq y \in L_\alpha \Rightarrow z = \lambda x + (1-\lambda)y \in L_\alpha$ PER $\lambda \in [0,1]$

USO $g(x) \leq \alpha$ E $g(y) \leq \alpha$ $\in L_\alpha$

DATO CHE $g$ È CONVEX, USO: $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$

- OBIETTIVO: $z \in L_\alpha$? $\Rightarrow g(z) \leq \lambda \underbrace{g(x)}_{\leq \alpha} + (1-\lambda)\underbrace{g(y)}_{\leq \alpha}$

$$g(z) \leq \underbrace{\lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha}_{=\alpha}$$

$g(z) \leq \alpha \Rightarrow z \in L_\alpha \Rightarrow$ L'INSIEME DI LIVELLO È CONVEX PER $\alpha$ GENERICO

## 21)

Sia dato il vettore $c \in \mathbb{R}^n$ e la funzione $f(x) = c^T x$. Si consideri anche la funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare su $\mathbb{R}^n$. Si dica (dimostrandolo) se la funzione $h(x) = 2f(x) + g(x)$ è lineare.

- $f$ E $g$ SONO LINEARI
- DIMOSTRARE CHE $h(x) = 2f(x) + g(x)$ È A SUA VOLTA LINEARE SIGNIFICA CHE

$h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$

SOSTITUISCO $h = 2f + g$

- $h(\alpha x + \beta y) = 2f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y)$

USO LINEARITÀ DI $f$ E $g$: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$

- $h(\alpha x + \beta y) = 2(\alpha f(x) + \beta f(y)) + \alpha g(x) + \beta g(y)$

$= \alpha\underbrace{(2f(x) + g(x))}_{h(x)} + \beta\underbrace{(2f(y) + g(y))}_{h(x)}$

$\Rightarrow h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y) \Rightarrow h(x)$ È LINEARE $\square$

22)

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa sull'insieme convesso $C \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano $x_1, x_2, x_3$ tre suoi minimi globali su $C$. Si dimostri *esplicitamente* (i.e. sfruttando la definizione di funzione convessa) che ogni combinazione convessa dei punti $x_1, x_2, x_3$ è a sua volta un punto di minimo globale su $C$.

- SE $\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{\in C}$ SON MIN GLOBALI DI $f$, SIGNIFICA CHE

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = m = \text{MIN}$$

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \in C \quad \text{CON } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \ \lambda_i \geq 0$$

- TROVARE LA COMBINAZIONE CONVESSA DI $x_1, x_2, x_3$ TALE CHE È MIN GLOBALE

DATO CHE $f$ È CONVESSA, VALE:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

$$\leq \underbrace{\lambda_1 m + \lambda_2 m + \lambda_3 m}_{= m}$$

$f(z) \leq m \Rightarrow z$ CHE È COMB. CONV. DI $x_1, x_2, x_3$ È A SUA VOLTA MIN GLOBALE

23)

Data la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convessa sull'insieme convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dimostrare che l'insieme delle soluzioni del problema $\min_{x \in A} f(x)$ è convesso. Si dia poi un esempio numerico di tale problema.

- DIMOSTRARE CHE: $S = \{ x \in A \mid f(x) = \min_{y \in A} f(y) \}$ È CONVESSO

$x, y =$ MIN GLOBALI $\in S \Rightarrow f(x) = f(y) = m$

↳ SE $S$ È CONVESSO, ALLORA $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) y \in S$

$f(x_\lambda) \leq m \Rightarrow$ DATO CHE $m$ È MIN GLOBALE, L'UNICO MODO È CHE ANCHE $x_\lambda$ LO SIA.

$x_\lambda \in S \Rightarrow S$ È CONVESSO

- ESEMPIO NUMERICO

1) $f(x) = x^2 \Rightarrow$ CONVESSA

$S = \{0\} \to S$ È CONVESSO ESSENDO UN SINGLETON

2) $f(x) = 2 \to \min f(x) = S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 2 \}$

$S$ È CONVESSO: L'INSIEME DELLE SOLUZIONI È UNA RETTA

24)

Date le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, lineari su $\mathbb{R}^n$, si dica (dimostrandolo) se la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ è lineare e se i suoi insiemi di livello sono convessi.

- INSIEMI DI LIVELLO: VEDI DOMANDA 4

$h(x)$ LINEARE? $\Rightarrow h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$?

$h \to f - g$

$h(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y)$

PER LINEARITÀ DI $f$ E $g$, POSSO SOSTITUIRE:

$$h(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) - [\alpha g(x) + \beta g(y)]$$

RACCOLGO $\alpha$ E $\beta$

$$h(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{(f(x) - g(x))}_{= h(x)} + \beta \underbrace{(f(y) - g(y))}_{= h(y)}$$

$$h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y) \Rightarrow h \text{ È LINEARE.}$$

25)

- SIA DATA LA FUNZIONE $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

  ENUNCIARE IL TH. DEL VALOR MEDIO I° E II° ORDINE

I°: DATA $g \in C^1$ SU INSIEME CONVESSO $C \subseteq \mathbb{R}^n$

PRENDO $x, y \in C$: ESISTE $\theta \in [0,1]$ TALE CHE $f(y) = f(x) + \nabla f(x + \theta(y - x))^T (y - x)$

II°: $g \in C^2$, IL RESTO COME IL I°

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(x + \theta(y - x))(y - x)$$

• NOTA: PER PROBLEMI DI PL:

$x, y \in \{0, 1\}$

ALMENO UNA DELLE DUE DEVE VALERE: $x + y \geq 1$

ESATTAMENTE UNA " " : $x + y = 1$

AL PIÙ UNA " " : $x + y \leq 1$

SE $x = 1 \Rightarrow \begin{matrix} y = 1 \\ \vee \\ z = 1 \end{matrix}$ $\left.\right\} \begin{matrix} x \leq y + \alpha M \\ x \leq z + (1-\alpha) M \end{matrix}$

Sia dato il problema $\max_{x \in C} \left[ f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i \right]$, con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f(x)$ *strettamente concava* su $C$. Si dimostri che se $x^*$ è un punto di massimo per $f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$ su $C$, allora sarà senz'altro anche un massimo globale per $f(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i$ su $C$.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $f(x)$ convessa su $\mathbb{R}^n$. Si mostri che presi *comunque* i punti $w \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^n$ di minimo globale per $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, allora anche il punto

$$t = \frac{1}{3}w + \frac{2}{3}z$$

è un minimo globale di $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$.

$f(w) = f(z) = m$

$f(\lambda w + (1-\lambda) z) \leq \lambda f(w) + (1-\lambda) f(z)$

PONGO $\lambda = 1/3$, E SOST. $f(w) = f(z) = m$

$f(1/3 w + \frac{2}{3} z) \leq \lambda m + (1-\lambda) m \rightarrow f(t) \leq m$

$t$ È MIN. GLOBALE

$1 - 1/3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$